

分式方程及应用（加油站）

一、分式方程

1. 方程 $\frac{2}{2x-1} = \frac{4}{4x^2-1}$ 的解为 $x = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $-\frac{1}{2}$

D. 无解

【答案】 D

【解析】 原方程可化为 $2x + 1 = 2$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 经检验 , 原方程无解 .

【标注】 【知识点】 解可化为一元一次方程的分式方程

2. 分式方程 $\frac{2x-5}{x-2} = \frac{3}{2-x}$ 的解是 $()$.

A. $x = -2$

B. $x = 2$

C. $x = 1$

D. $x = 1$ 或 $x = 2$

【答案】 C

【解析】 方程两边同乘 $(x-2)$, 得 $2x - 5 = -3$,

解得 $x = 1$.

检验 : 当 $x = 1$ 时 , $x - 2 = -1 \neq 0$.

$\therefore$ 原方程的解为 : $x = 1$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 分式方程的解

3. 解方程 : $\frac{2x}{2x-5} - \frac{2}{2x+5} = 1$.

【答案】 $x = -\frac{35}{6}$.

【解析】 去分母，方程两边都乘最简公分母 $(2x-5)(2x+5)$ ，

$$\text{得 } 2x(2x+5) - 2(2x-5) = (2x-5)(2x+5) ,$$

$$\text{整理得 } , 6x = -35 ,$$

$$\therefore x = -\frac{35}{6} .$$

经检验， $x = -\frac{35}{6}$ 是原分式方程的解 .

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

4. 解分式方程： $\frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{x+1}{4x^2-1}$.

【答案】 $x = 6$.

【解析】 方程左右两边同时乘以 $(2x+1)(2x-1)$ ，得：

$$3(2x-1) - 2(2x+1) = x+1 ,$$

$$6x-3-4x-2 = x+1 ,$$

$$6x-4x-x = 1+2+3 ,$$

$$x = 6 ,$$

检验：把 $x=6$ 代入 $(2x+1)(2x-1)$ ，得， $(2 \times 6 + 1)(2 \times 6 - 1) = 143 \neq 0$ ，

$\therefore x=6$ 是原方程的解 .

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

5. 解方程： $\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1$.

【答案】原方程无解 .

【解析】方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,

$$\text{得}(x+1)^2 - 4 = (x+1)(x-1) ,$$

$$\text{整理得}2x - 2 = 0 ,$$

$$\text{解得}x = 1 ,$$

$$\text{经检验：当}x = 1\text{时} , (x+1)(x-1) = 0 ,$$

$\therefore x = 1$ 是原方程的增根 , 应舍去 .

$\therefore$ 原方程无解 .

【标注】【知识点】解可化为一元二次方程的分式方程

6. 解方程： $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

【答案】原方程无解 .

【解析】方法一： $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$,

$$\frac{x-x+1}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} ,$$

$$\therefore \frac{1}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} ,$$

$$\therefore (x-1)(x+2) = 3(x-1) ,$$

$$\therefore (x-1)(x+2-3) = 0 ,$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0 ,$$

$$\therefore x = 1 ,$$

$$\text{检验 , 当}x = 1\text{时} , x-1 = 0 ,$$

因此 $x = 1$ 不是原分式方程的解 ,

$\therefore$ 原分式方程无解 .

方法二：方程两边同乘以 $(x-1)(x+2)$, 得

$$x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3 ,$$

化简，得 $x + 2 = 3$ ，

解得： $x = 1$.

检验：把 $x = 1$ 代入 $(x - 1)(x + 2) = 0$.

$\therefore x = 1$ 不是原方程的解，原分式方程无解.

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

7. 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-2} + \frac{k}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ 有增根 $x = -2$ ，则 k 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】 方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$ ，都

$$x + 2 + k(x - 2) = 4,$$

$\therefore$ 原方程增根为 $x = -2$ ，

$\therefore$ 把 $x = -2$ 代入整式方程，得 $k = -1$.

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

8. 关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x^2-1} + \frac{a}{x+1} = 1$ 有增根 $x = -1$ ，则 a 的值是_____.

【答案】 1

【解析】 两边同时乘以 $x^2 - 1$ 得， $2 + a(x - 1) = x^2 - 1$ ，

将 $x = -1$ 代入得， $2 + a \times (-2) = 1 - 1$

$$2 - 2a = 0,$$

解得， $a = 1$.

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

9. 关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{m}{x-1}$ 无解，则 m 的值是_____.

【答案】 1

【解析】 将分式方程两边同乘 $x - 1$ 去分母，得 $x - 2(x - 1) = m$ ，

整理得 $x = 2 - m$ ，

$\therefore$ 原分式方程无解，

$\therefore x = 2 - m$ 为方程的增根，

即当 $x = 2 - m$ 时 $x - 1 = 0$,

$\therefore 2 - m = 1$, 解得 $m = 1$.

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

10. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-5} + 2 = \frac{2x}{5-x}$ 无解, 那么 $m = ()$.

A. -10

B. 10

C. 20

D. -20

【答案】A

【解析】原方程可化为 $m + 2(x - 5) = -2x$, 解得 $x = \frac{10 - m}{4}$, 欲使原方程无解, 需有 $x = 5$, 即 $m = -10$, 故选择A.

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

二、分式方程的应用

11. 世界文化遗产“三孔”景区已经完成5G基站布设, “孔夫子家”自此有了5G网络. 5G网络峰值速率为4G网络峰值速率的10倍, 在峰值速率下传输500兆数据, 5G网络比4G网络快45秒, 求这两种网络的峰值速率. 设4G网络的峰值速率为每秒传输 x 兆数据, 依题意, 可列方程是().

A. $\frac{500}{x} - \frac{500}{10x} = 45$

B. $\frac{500}{10x} - \frac{500}{x} = 45$

C. $\frac{5000}{x} - \frac{500}{x} = 45$

D. $\frac{500}{x} - \frac{5000}{x} = 45$

【答案】A

【解析】设4G网络的峰值速率为每秒传输 x 兆数据, 依题意, 可列方程是.

$$\frac{500}{x} - \frac{500}{10x} = 45.$$

故选A.

【标注】【知识点】分式方程的和差倍分

12. 某工厂现在平均每天比原计划多生产50台机器, 现在生产600台所需时间与原计划生产450台机器所需时间相同. 设原计划平均每天生产 x 台机器, 根据题意, 下面所列方程正确的是().

A. $\frac{600}{x-50} = \frac{450}{x}$

B. $\frac{600}{x+50} = \frac{450}{x}$

C. $\frac{600}{x} = \frac{450}{x+50}$

D. $\frac{600}{x} = \frac{450}{x-50}$

【答案】B

【解析】 设原计划平均每天生产 x 台机器，则实际平均每天生产 $(x+50)$ 台机器，

$$\text{由题意得，} \frac{600}{x+50} = \frac{450}{x} .$$

故选B .

【标注】【知识点】分式方程的和差倍分

13. 明明要到距家1000米的学校上学，一天，明明出发2分钟后，明明的爸爸立即去追明明，且在距离学校10米的地方追上了他．已知爸爸比明明的速度每分钟快20米，求明明的速度．若设明明速度是 x 米/分，则根据题意所列方程正确的是（ ）．

A. $\frac{1000-10}{x-20} - \frac{1000-10}{x} = 2$

B. $\frac{1000-10}{x+20} = \frac{1000-10}{x} - 2$

C. $\frac{1000-10}{x+20} = \frac{1000-10}{x} + 2$

D. $\frac{1000-10}{x-20} + 2 = \frac{1000-10}{x}$

【答案】 B

【解析】 设明明速度是 x 米/分，则爸爸速度是 $(x+20)$ 米/分，

$$\text{根据题意，可得：} \frac{1000-10}{x+20} = \frac{1000-10}{x} - 2 .$$

故答案选B .

【标注】【知识点】分式方程的行程问题

14. 小王乘公共汽车从甲地到相距40km的乙地办事，然后乘出租车返回，出租车的平均速度比公共汽车快20km/h，回来时路上所花时间比去时节省了 $\frac{1}{4}$ ，设公共汽车的平均速度为 x km/h，则下面列出的方程正确的是（ ）．

A. $\frac{40}{x+20} = \frac{3}{4} \cdot \frac{40}{x}$

B. $\frac{40}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{40}{x+20}$

C. $\frac{40}{x+20} + \frac{1}{4} = \frac{40}{x}$

D. $\frac{40}{x} = \frac{40}{x+20} - \frac{1}{4}$

【答案】 A

【解析】 设公共汽车的平均速度为 x km/h时，则出租车的平均速度为 $(x+20)$ km/h，根据回来时路上所花时间比去时节省了 $\frac{1}{4}$ ，得出回来时路上所花时间为： $\frac{3}{4} \cdot \frac{40}{x}$ ，

$$\text{由题意得} \frac{40}{x+20} = \frac{3}{4} \times \frac{40}{x} .$$

【标注】【知识点】分式方程的行程问题

15. 小明乘出租车去体育场，有两条路线可供选择：路线一的全程是25千米，但交通比较拥堵，路线二的全程是30千米，平均车速比走路线一时的平均车速能提高80%，因此能比走路线一少用10分钟到

达. 若设走路线一时的平均速度为 x 千米/小时, 根据题意, 得().

A. $\frac{25}{x} - \frac{30}{(1+80\%)x} = \frac{10}{60}$
C. $\frac{30}{(1+80\%)x} - \frac{25}{x} = \frac{10}{60}$

B. $\frac{25}{x} - \frac{30}{(1+80\%)x} = 10$
D. $\frac{30}{(1+80\%)x} - \frac{25}{x} = 10$

【答案】 A

【解析】 设走路线一时的平均速度为 x 千米/小时,

$$\frac{25}{x} - \frac{30}{(1+80\%)x} = \frac{10}{60},$$

故选: A.

【标注】 【知识点】 分式方程的行程问题

16. 轮船沿江从A港顺流行驶到B港, 比从B港返回A港少用3小时, 若船速为26千米/时, 水速为2千米/时, 求A港和B港相距多少千米. 设A港和B港相距 x 千米. 根据题意, 列出的方程是().

A. $\frac{x}{28} = \frac{x}{24} + 3$ B. $\frac{x}{28} = \frac{x}{24} - 3$ C. $\frac{x+2}{26} = \frac{x-2}{26} + 3$ D. $\frac{x-2}{26} = \frac{x+2}{26} - 3$

【答案】 B

【解析】 设A、B两港相距 x 千米,

顺流时的速度为 $(26+2)=28$ 千米/小时,

逆流时的速度为 $(26-2)=24$ 千米/小时,

根据题意, 从A到B为顺流行驶, 所用时间为 $\frac{x}{28}$ 小时,

从B返回A为逆流行驶, 所用时间为 $\frac{x}{24}$ 小时,

列方程为 $\frac{x}{24} - \frac{x}{28} = 3$, 移项可得: $\frac{x}{28} = \frac{x}{24} - 3$.

故选B.

【标注】 【知识点】 分式方程的行程问题

17. 王师傅检修一条长600米的自来水管, 计划用若干小时完成, 在实际检修过程中, 每小时检修的管道长度是原计划的1.2倍, 结果提前2小时完成任务, 王师傅原计划每小时检修管道多少米?

【答案】 原计划每小时检修管道50米 .

【解析】 设原计划每小时检修管道 x 米 ,

$$\text{由题意, 得 } \frac{600}{x} - \frac{600}{1.2x} = 2 ,$$

$$\text{解得 } x = 50 ,$$

经检验, $x = 50$ 是原方程的解 . 且符合题意 .

答: 原计划每小时检修管道50米 .

【标注】 【知识点】 分式方程的工程问题

18. 现有“复兴号”列车和“和谐号”两种型号的列车 . 与“和谐号”相比, “复兴号”列车时速更快, 安全性更好 . 已知从甲地到乙地全程大约500千米, “复兴号”G92次列车平均每小时比某列“和谐号”列车多行驶40千米, 其行驶时间是该列“和谐号”列车行驶时间的 $\frac{4}{5}$ (两列车中途停留时间均除外) . 经查询, “复兴号”G92次列车从甲地到乙地中途只有丙地一站, 停留10分钟, 求乘坐“复兴号”G92次列车从甲地到乙地需要多长时间 .

【答案】 乘坐“复兴号”G92次列车从太原南到北京西需要 $\frac{8}{3}$ 小时 .

【解析】 设“复兴号”G92次列车从甲地到乙地需要行驶时间需要 x 小时, 则“和谐号”列车的行驶时间需要 $\frac{5}{4}x$ 小时 ,

$$\text{根据题意得: } \frac{500}{x} = \frac{500}{\frac{5}{4}x} + 40 ,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{2} ,$$

经检验, $x = \frac{5}{2}$ 是原分式方程的解 ,

$$\therefore x + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} .$$

答: 乘坐“复兴号”G92次列车从太原南到北京西需要 $\frac{8}{3}$ 小时 .

【标注】 【知识点】 分式方程的行程问题

19.

从广州到某市，可乘坐普通列车或高铁，已知高铁的行驶路程是400千米，普通列车的行驶路程是高铁的行驶路程的1.3倍．

(1) 求普通列车的行驶路程．

(2) 若高铁的平均速度(千米/时)是普通列车平均速度(千米/时)的2.5倍，且乘坐高铁所需时间比乘坐普通列车所需时间缩短3小时，求高铁的平均速度．

【答案】 (1) 普通列车的行驶路程为520千米．

(2) 高铁的平均速度是300千米/时．

【解析】 (1) 根据题意得：

$$400 \times 1.3 = 520 \text{ (千米)},$$

答：普通列车的行驶路程是520千米．

(2) 方法一：设高铁平均速度为 x 千米/时，则普通列车平均速度为 $x \div 2.5 = \frac{2}{5}x$ ，

$$\text{由题可得：} \frac{400}{x} + 3 = \frac{520}{\frac{2}{5}x},$$

解得 $x = 300$ ．

经检验： $x = 300$ 是原分式方程的解，且符合题意．

答：高铁的平均速度是 $x = 300$ 千米/时．

方法二：设普通列车平均速度是 x 千米/时，则高铁平均速度是 $2.5x$ 千米/时，根据题意得：

$$\frac{520}{x} - \frac{400}{2.5x} = 3,$$

解得： $x = 120$ ，

经检验 $x = 120$ 是原方程的解，

则高铁的平均速度是 $120 \times 2.5 = 300$ (千米/时)，

答：高铁的平均速度是300千米/时．

【标注】【知识点】分式方程的行程问题

20. 李老师家距学校1900米，某天他步行去上班，走到路程的一半时发现忘带手机，此时离上班时间还有23分钟，于是他立刻步行回家取手机，随后骑电瓶车返回学校．已知李老师骑电瓶车到学校比他

步行到学校少用20分钟，且骑电瓶车的平均速度是步行速度的5倍，李老师到家开门、取手机、启动电瓶车等共用4分钟．

(1) 求李老师步行的平均速度．

(2) 请你判断李老师能否按时上班，并说明理由．

【答案】 (1) 76m/min .

(2) 李老师能按时上班 .

【解析】 (1) 设李老师步行的平均速度为 x m/min，骑电瓶车的平均速度为 $5x$ m/min，

由题意得， $\frac{1900}{x} - \frac{1900}{5x} = 20$ ，

解得： $x = 76$ ，

经检验， $x = 76$ 是原分式方程的解，且符合题意，

则 $5x = 76 \times 5 = 380$ ，

李老师步行的平均速度为76m/min，骑电瓶车的平均速度为380m/min .

(2) 由(1)得，李老师走回家需要的时间为： $\frac{1900}{2 \times 76} = 12.5$ min，

骑车走到学校的时间为： $\frac{1900}{380} = 5$ ，

则李老师走到学校所用的时间为： $12.5 + 5 + 4 = 21.5 < 23$ ，

∴李老师能按时上班 .

【标注】【知识点】分式方程的行程问题